共通テスト対策講座 数学ＩＡ

この講座は，「大学入学共通テスト 試行調査 数学ＩＡ」および「令和２年度大学入試センター試験 数学ＩＡ」をベースに，大学入学共通テスト 数学ＩＡで問われる資質・能力がどんなものかを感じ取り，その後の学習に活かしていただくための講座です。

大学入学共通テストの前身であるセンター試験の数学は，問題の設定を理解し，誘導の流れや意図を把握しながら解き進め，そのプロセスおよび結果をマークすることで，大学教育の基礎となる知識・技能や，思考力・判断力・表現力を見る試験でした。別解が他に存在したとしても，限られた時間内にその流れを理解し，正確に計算し，時には立ち止まって整理し，解答に行き着き，マークまでを終える必要があるこのセンター試験の数学に関しては，記述力がある人でも点数がとれない，ということが起こり得る，そんな試験でした。

大学入学共通テストの数学においても，センター試験における出題のねらいを踏襲しつつ，さらに会話で問題を解き進めるプロセスを追体験したり，日常生活に紐付く題材を数学で解決する等，高等学校における「学びの場面」を意識した出題が含まれ，それを「試行試験」を通じて体験することができます。知識や解き方を知っているか，ではなく，その場で問題の中で展開される「初めて見る場面・設定」においても，それまでの学びで得た経験を活かしながら，基本的な知識・技能を適切に活用して解きほぐしていく，そんな力が求められます。まずは，ご紹介している問題を通じて，一緒にそれを解釈していきましょう。

最後に。この講座だけを受講すればよいのではありません。この講座で身につけた数学的な見方・考え方を，センター試験の過去問や，共通テスト向けの問題集，さらには記述式の問題集を解く際に役立てていくことにより，大学入学共通テストで問われる資質・能力がさらに養われていくでしょう。講座の受講は，始まりにすぎません。そして，その始まりは，あなたの輝かしい未来に続く道の歩みの始まりでもあります。何かを見失いそうになったとき，またこの講座に戻ってきてください。いつでも，何度でも，あなたに身につけてほしい観点を語りかけます。

山内 恵介

目　次

第１講　数学Ⅰ 小問集合 …… p2
第２講　２次関数 …… p10
第３講　図形と計量 …… p18
第４講　データの分析 …… p32
第５講　場合の数と確率 …… p50
第６講　整数の性質 …… p60
第７講　図形の性質 …… p70
第８講　実践演習問題 第１問 …… p82
第９講　実践演習問題 第２問 …… p88
第10講　実践演習問題 第３問～第５問 …… p94

はじめに　受講の仕方・予習復習の仕方

① 予習について

講座の受講前に「講義問題」を解いてください。1～3の３問構成です。まずは何も見ないで問題をノート等に解いてみましょう。特に時間を計る必要はありません。予習をすることで自分の注力して見るべきポイントがわかった状態を作る，これが講義を受ける前に必要な準備です。予習ですべて解けている必要はございません。

② 講義について

予習が完了した状態で，授業動画を見ていただき，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。その際には，予習で整理した「注力して見るべきポイント」に集中しながら，また自分の解法との「差違」を感じながら受講しましょう。

③ 復習について

授業で扱ったポイントを頭に描きながら，まずは問題をもう一度解いてみましょう。予習での自分のやり方に満足できた部分はさらなるスピードアップを，できなかったところや新たな観点を身につけたところはそれを確かめるようにゆっくりと。また，忘れてしまった場合はもう一度講義を見直しましょう。そのようにして，ある大問を最後まで解ききったとき，その大問があなたにどんな資質・能力を要求したのかを，解答全体を見て確認しておきましょう。

そして二回目以降は，できる限り「最高速度」で問題を解いてみましょう。さらに，大問を必ず最後まで通してみましょう。すでに自分でじっくり取り組んだ問題ですので，その流れを追うことでより理解が深まり，また速度と正確性を上げる練習を行うことができます。

④ 講座受講後

講座受講後は，大学入学共通テストを題材として扱う市販の問題集に取り組むとよいでしょう。その場合については，上記①～③と同じように，問題と解くところから復習までじっくり取り組むとよいでしょう。また，「設定や条件を理解し，誘導の流れをつかみ，マークに合わせて解答する」という観点を身につける

には，センター試験の過去問題に取り組むことも効果的です。ただし解くだけに留まらず，大問１問を通じてどのような流れで構成されているのかを，復習時に理解し，くり返し問題に取り組む際にはその流れを意識するとよいでしょう。

第1講　数学Ⅰ 小問集合

1〔1〕 a を定数とする。

(1) 直線 $\ell: y=(a^2-2a-8)x+a$ の傾きが負となるのは，a の値の範囲が

$\boxed{\text{アイ}}<a<\boxed{\text{ウ}}$

のときである。

(2) $a^2-2a-8\neq 0$ とし，(1)の直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標を b とする。

$a>0$ の場合，$b>0$ となるのは $\boxed{\text{エ}}<a<\boxed{\text{オ}}$ のときである。

$a\leqq 0$ の場合，$b>0$ となるのは $a<\boxed{\text{カキ}}$ のときである。

また，$a=\sqrt{3}$ のとき

$$b=\frac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

である。

〔２〕 c を定数とする。2 次関数 $y=x^2$ のグラフを，2 点 $(c,\ 0)$，$(c+4,\ 0)$ を通るように平行移動して得られるグラフを G とする。

(1) G をグラフにもつ 2 次関数は，c を用いて

$$y=x^2-2\left(c+\boxed{\text{ア}}\right)x+c\left(c+\boxed{\text{イ}}\right)$$

と表せる。

2 点 $(3,\ 0)$，$(3,\ -3)$ を両端とする線分と G が共有点をもつような c の値の範囲は

$$-\boxed{\text{ウ}}\leqq c\leqq\boxed{\text{エ}},\quad \boxed{\text{オ}}\leqq c\leqq\boxed{\text{カ}}$$

である。

(2) $\boxed{\text{オ}}\leqq c\leqq\boxed{\text{カ}}$ の場合を考える。G が点 $(3,\ -1)$ を通るとき，G は 2 次関数 $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{キ}}+\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$，$y$ 軸方向に $\boxed{\text{ケコ}}$ だけ平行移動したものである。また，このとき G と y 軸との交点の y 座標は $\boxed{\text{サ}}+\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である。

2　△ABC において，$\mathrm{BC}=2\sqrt{2}$ とする。∠ACB の二等分線と辺 AB の交点を D とし，$\mathrm{CD}=\sqrt{2}$，$\cos\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{3}{4}$ とする。このとき，BD＝ ア であり

$$\sin\angle\mathrm{ADC}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ であるから

AD＝ カ

である。また，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

＜ NOTE ＞

3 〔1〕 自然数 n に関する三つの条件 p，q，r を次のように定める。

p：n は 4 の倍数である

q：n は 6 の倍数である

r：n は 24 の倍数である

条件 p，q，r の否定をそれぞれ $\overline{p}$，$\overline{q}$，$\overline{r}$ で表す。

条件 p を満たす自然数全体の集合を P とし，条件 q を満たす自然数全体の集合を Q とし，条件 r を満たす自然数全体の集合を R とする。自然数全体の集合を全体集合とし，集合 P，Q，R の補集合をそれぞれ $\overline{P}$，$\overline{Q}$，$\overline{R}$ で表す。

(1) 次の [ア] に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

$32 \in$ [ア] である。

⓪ $P \cap Q \cap R$　① $P \cap Q \cap \overline{R}$　② $P \cap \overline{Q}$

③ $\overline{P} \cap Q$　④ $\overline{P} \cap \overline{Q} \cap R$　⑤ $\overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R}$

（3〔1〕は次ページに続く。）

(2)　次の［エ］に当てはまるものを，下の⓪～④のうちから一つ選べ。

$P \cap Q$ に属する自然数のうち最小のものは［イウ］である。
また，［イウ］［エ］R である。

⓪ $=$　　① $\subset$　　② $\supset$　　③ $\in$　　④ $\notin$

(3)　次の［オ］に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

自然数［イウ］は，命題［オ］の反例である。

⓪ 「(p かつ q) $\Longrightarrow \overline{r}$」　　① 「($p$ または q) $\Longrightarrow \overline{r}$」
② 「$r \Longrightarrow$ (p かつ q)」　　③ 「(p かつ q) $\Longrightarrow r$」

〔２〕 有理数全体の集合を A，無理数全体の集合を B とし，空集合を $\varnothing$ と表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 「集合 A と集合 B の共通部分は空集合である」という命題を，記号を用いて表すと次のようになる。

$$A \cap B = \varnothing$$

「1 のみを要素にもつ集合は集合 A の部分集合である」という命題を，記号を用いて表せ。

(2) 命題「$x \in B$，$y \in B$ ならば，$x + y \in B$ である」が偽であることを示すための反例となる x，y の組を，次の⓪～⑤のうちから二つ選べ。必要ならば，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを用いてもよい。ただし，解答の順序は問わない。

［ア］，［イ］

⓪ $x=\sqrt{2}$，$y=0$

① $x=3-\sqrt{3}$，$y=\sqrt{3}-1$

② $x=\sqrt{3}+1$，$y=\sqrt{2}-1$

③ $x=\sqrt{4}$，$y=-\sqrt{4}$

④ $x=\sqrt{8}$，$y=1-2\sqrt{2}$

⑤ $x=\sqrt{2}-2$，$y=\sqrt{2}+2$

＜ NOTE ＞

第１講　数学Ｉ　小問集合

1 〔1〕

(1)　直線 ℓ の傾きが負となるのは $a^2-2a-8<0$ のとき

$(a+2)(a-4)<0$　　ゆえに　$-2<a<4$

(2)　$a^2-2a-8 \neq 0$ のとき，直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標 b は

$0=(a^2-2a-8)b+a$　より　$b=\dfrac{-a}{a^2-2a-8}$

$a>0$ のとき，$b>0$ となるのは $a^2-2a-8<0$ のとき

(1)より　$-2<a<4$　　ゆえに　$0<a<4$

$a \leqq 0$ のとき，$b>0$ となるのは $a \neq 0$ かつ $a^2-2a-8>0$ のとき

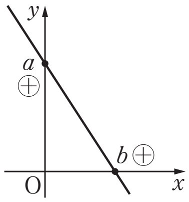
$(a+2)(a-4)>0$　$a<-2,\ 4<a$　　ゆえに　$a<-2$（$a \neq 0$ を満たす）

（参考）

ℓ は傾き a^2-2a-8（$\neq 0$），切片 a の直線

切片 $a>0$ のとき，直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標 b が

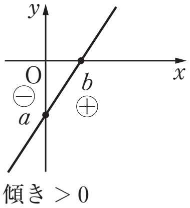
$b>0$ となるのは傾き $a^2-2a-8<0$ のとき



傾き＜0

切片 $a \leqq 0$ のとき，直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標 b が

$b>0$ となるのは $a \neq 0$ かつ傾き $a^2-2a-8>0$ のとき



傾き＞0

$a=\sqrt{3}$ のとき

$$b=\frac{-\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}-8}=\frac{\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(5-2\sqrt{3})}{(5+2\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}=\frac{5\sqrt{3}-6}{13}$$

〔2〕

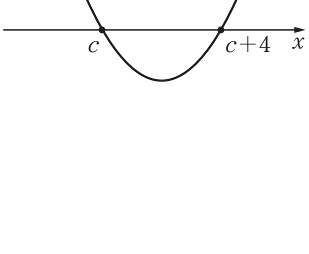
(1)　$y=1\cdot(x-c)\{x-(c+4)\}$

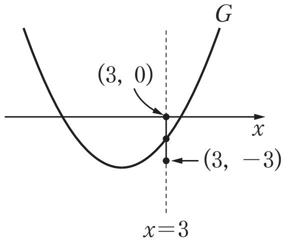
$\quad =x^2-(2c+4)x+c(c+4)$

よって　$G：y=x^2-2(c+2)x+c(c+4)$

$x=3$ のとき　$y=3^2-2(c+2)\cdot 3+c(c+4)$

$\quad =c^2-2c-3$





よって，2点 $(3,\ 0)$，$(3,\ -3)$ を両端とする線分，

すなわち $x=3$ $(-3\leqq y\leqq 0)$ と G が共有点をもつのは，

$-3\leqq c^2-2c-3\leqq 0$ のとき

$-3\leqq c^2-2c-3$　より　$c^2-2c\geqq 0$

$c(c-2)\geqq 0$　よって　$c\leqq 0,\ 2\leqq c$

$c^2-2c-3\leqq 0$　より　$(c-3)(c+1)\leqq 0$

よって　$-1\leqq c\leqq 3$

したがって，$-1\leqq c\leqq 0,\ 2\leqq c\leqq 3$

(2)　$2\leqq c\leqq 3$ のとき

G が点 $(3,\ -1)$ を通るのは $c^2-2c-3=-1$　　$c^2-2c-2=0$　　$c=1\pm\sqrt{3}$

$2\leqq c\leqq 3$　より　$c=1+\sqrt{3}$

$G：y=\{x-(c+2)\}^2-(c+2)^2+c(c+4)=\{x-(c+2)\}^2-4$　より

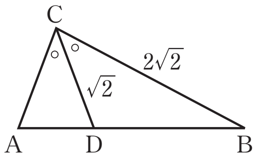
$c=1+\sqrt{3}$ のとき，グラフの頂点は $(3+\sqrt{3},\ -4)$

このグラフは，頂点が $(0,\ 0)$ である $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $3+\sqrt{3}$，y 軸方向に -4 だけ平行移動したものである。

また，このとき G と y 軸との交点の y 座標，すなわち G の切片は

(1)より　$c(c+4)=(1+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})=8+6\sqrt{3}$

2　△BCD で余弦定理より



$$BD^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}=4$$

$BD>0$ より　$BD=2$

$\sin\angle ADC=\sin(180^\circ-\angle BDC)=\sin\angle BDC$ であり，

△BCD で余弦定理より $\cos\angle BDC=\dfrac{2^2+(\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

よって，$\sin\angle BDC=\sqrt{1-\cos^2\angle BDC}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ より，

$\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

CD は ∠ACB の二等分線であるから，AC：BC＝AD：BD

ゆえに $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

よって，$AC：AD=\sqrt{2}：1$ より，$AD=x$ とおくと，$AC=\sqrt{2}x$ と表される。

$\cos\angle \mathrm{ACD}=\cos\angle \mathrm{BCD}=\dfrac{3}{4}$ であるから，△ACD で余弦定理より

$$x^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}x)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}x\cdot\frac{3}{4}$$

$$x^2-3x+2=0 \qquad (x-1)(x-2)=0 \qquad x=1,\ 2$$

$x=2$ のとき，AD$=2$，AC$=2\sqrt{2}$ より，△ACB は AC＝BC の二等辺三角形であり，点 D は辺 AB の中点であるから，CD⊥AB である。よって，$\sin\angle \mathrm{ADC}=1$ となり，$\sin\angle \mathrm{ADC}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ であることに反し不適。

$x=1$ のとき，AD$=1$，AC$=\sqrt{2}$ より，△ACD は AC＝DC の二等辺三角形。

よって，∠DAC＝∠ADC より $\sin\angle \mathrm{DAC}=\sin\angle \mathrm{ADC}$

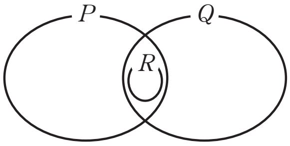
このとき，△ABC の外接円の半径を R とすると，△ABC で正弦定理より

$$2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle \mathrm{DAC}}=\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle \mathrm{ADC}} \qquad ゆえに \qquad R=\frac{2\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}}=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

3〔1〕 $P\cap Q$ に属する自然数は，4 と 6 の最小公倍数 12 の倍数である。

また，ある自然数が 24 の倍数ならば 12 の倍数であるが，ある自然数が 12 の倍数であっても 24 の倍数ではないものが存在するので，$P\cap Q\supset R$ である。

したがって，ベン図は右図のようになる。



(1) $32\in P$，$32\notin Q$ より，$32\in P\cap\overline{Q}$ （②）である。

(2) $P\cap Q$ に属する最小の自然数は 12

また，$12\notin R$ （④）である。

(3) (2)より，12 は「(p かつ q)⇒r」（③）の反例である。

〔2〕

(1) $\{1\}\subset A$ 　$(A\supset\{1\})$

(2) ⓪……$y=0$ は有理数。よって仮定を満たしていない。

①……x, y はともに無理数で, $x+y=(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)=2$ は有理数である。

よって，命題が偽であることを示す反例になっている。

②……x，y はともに無理数で，$x+y=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{2}-1)=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ は無理数である。

よって，命題が偽であることを示す反例になっていない。

③……$x=\sqrt{4}=2$，$y=-\sqrt{4}=-2$ はともに有理数。よって仮定を満たしていない。

④……$x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，$y=1-2\sqrt{2}$ はともに無理数で，

$x+y=2\sqrt{2}+\left(1-2\sqrt{2}\right)=1$ は有理数である。よって，命題が偽であることを示す反例になっている。

⑤……x，y はともに無理数で，$x+y=\left(\sqrt{2}-2\right)+\left(\sqrt{2}+2\right)=2\sqrt{2}$ は無理数である。

よって，命題が偽であることを示す反例になっていない。

したがって，命題が偽であることを示す反例となる x，y の組は，①と④